數學傳播 39卷2期, pp. 94-96

n 對平行線猜想的證明

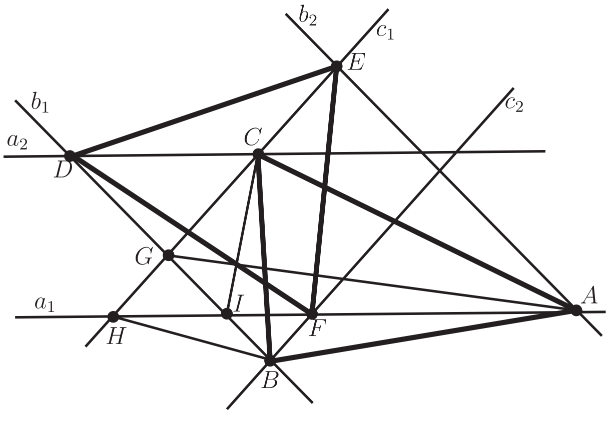
吳 波

文 [1] 中劉步松老師證明了名之爲“三組平行線定理”的如下優美結論:

定理1([1]): 如圖一, 平面上給定三組平行線, 分別是 $a_1//a_2$, $b_1//b_2$, $c_1//c_2$, 處在不同組的兩條直線都是相交的。設 a_1 與 b_2 的交點爲 A, b_1 與 c_2 的交點爲 B, c_1 與 a_2 的交點爲 C; a_2 與 b_1 的交點爲 D, b_2 與 c_1 的交點爲 E, c_2 與 a_1 的交點爲 F, 則有如下兩個結論:

(1) 若 A, B, C 三點不共線, 則 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle DEF}$;

(2) 若 A, B, C 三點共線, 則 D, E, F 三點也共線。



圖一

文 [1] 猜想這個結論可以推廣到 n 對平行線時, 並對 $n=4$, 5, 6, 7驗證了猜想成立。

本文擬在一般情形下證明這個猜想。

對凸多邊形 $A_1A_2\cdots A_n$, 從一個頂點出發的 $n-3$ 條對角線可將其分成 $n-2$ 個三角形, 因此有

$$S_{A_1A_2A_3\cdots A_n}=S_{\triangle A_1A_2A_3}+S_{\triangle A_1A_3A_4}+S_{\triangle A_1A_4A_5}+\cdots+S_{\triangle A_1A_{n-1}A_n}. \qquad (1)$$

註: 上式中各三角形的面積均是指有向面積。

對一般的平面多邊形 (不論凸的、凹的, 甚至是邊與邊有交點的多邊形), 我們作如下定義

定義1: 對平面多邊形$A_1A_2\cdots A_n$, 由(1)式定義的$S_{A_1A_2\cdots A_n}$稱爲多邊形$A_1A_2\cdots A_n$的面積。

可以證明 (證略):

引理1: 對平面多邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 所在平面內任一點 O, 下式恒成立:

$$S_{A_1A_2A_3\cdots A_n}=S_{\triangle OA_1A_2}+S_{\triangle OA_2A_3}+S_{\triangle OA_3A_4}+\cdots+S_{\triangle OA_{n-1}A_n}+S_{\triangle OA_nA_1}.$$

設 O 爲給定的點, 下面我們約定 $\boldsymbol{P}$ 表示向量 $\boldsymbol{OP}$。

我們知道, 三角形面積與向量外積“$\times$” (或稱向量積) 有關, 由此我們不妨作如下定義:

定義2: $S_{\triangle OAB}=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{OA}\times\boldsymbol{OB}=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$。

當 O、A、B 輪換時 $S_{\triangle OAB}$ 的值不變; 當 O、A、B 中有兩者重合時 $S_{\triangle OAB}$ 的值爲 0。

定義 2 結合引理 1 立得:

引理2: $2S_{A_1A_2\cdots A_n}=\boldsymbol{A}_1\times\boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{A}_2\times\boldsymbol{A}_3+\boldsymbol{A}_3\times\boldsymbol{A}_4+\cdots+\boldsymbol{A}_{n-1}\times\boldsymbol{A}_n+\boldsymbol{A}_n\times\boldsymbol{A}_1$。

現在我們就可以證明 “n 對平行線猜想” 了。

定理2: 若平面上的兩個多邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 和 $B_1B_2\cdots B_n$ 滿足:$A_iB_{i+1}//A_{i+1}B_i$ ($i=1$, 2, 3,$\ldots,n$, 此處約定: $A_{n+1}=A_1$, $B_{n+1}=B_1$), 則這兩個多邊形的面積相等。

證明: 因爲 $A_iB_{i+1}//A_{i+1}B_i$, 則 $\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{B}_{i+1}\times\boldsymbol{A}_{i+1}\boldsymbol{B}_i=\boldsymbol{0}$。即 $(\boldsymbol{B}_{i+1}-\boldsymbol{A}_i)\times(\boldsymbol{B}_i-\boldsymbol{A}_{i+1})=\boldsymbol{0}$。

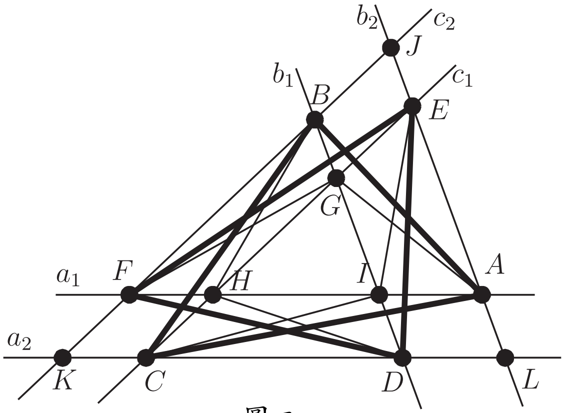
展開變形得:$\boldsymbol{B}_i\times\boldsymbol{B}_{i+1}-\boldsymbol{A}_{i+1}\times\boldsymbol{B}_{i+1}+\boldsymbol{A}_i\times\boldsymbol{B}_i=\boldsymbol{A}_i\times\boldsymbol{A}_{i+1}$。

分別令 $i=1,2,3,\ldots,n$, 將所得 n 式累加可得 (注意 $A_{n+1}=A_1$, $B_{n+1}=B_1$):

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{B}_1\times\boldsymbol{B}_2+\boldsymbol{B}_2\times\boldsymbol{B}_3+\boldsymbol{B}_3\times\boldsymbol{B}_4+\cdots+\boldsymbol{B}_{n-1}\times\boldsymbol{B}_n+\boldsymbol{B}_n\times\boldsymbol{B}_1\\&=\boldsymbol{A}_1\times\boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{A}_2\times\boldsymbol{A}_3+\boldsymbol{A}_3\times\boldsymbol{A}_4+\cdots+\boldsymbol{A}_{n-1}\times\boldsymbol{A}_n+\boldsymbol{A}_n\times\boldsymbol{A}_1.\end{aligned}$$

由引理2即知這兩個多邊形的面積相等。 □

另外, 筆者發現可以用割補法給出定理 1 的純幾何證明。思路很簡單: 爲了利用條件中的平行線, 將兩個目標圖形分別分割成若干對等底等高的三角形即可。



圖二

如圖二, 條件同定理1, 其中直線 b_1 和 c_1 相交於點 G, a_1 和 c_1 相交於點 H, a_1 和 b_1 相交於點 I。我們插入點 G、H、I 對兩目標三角形進行分割。

由引理1有: $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle GAB}+S_{\triangle GBC}+S_{\triangle GCA}$。其中:$S_{\triangle GBC}=S_{\triangle HGC}+S_{\triangle HBC}+S_{\triangle HCG}=S_{\triangle HGB}+S_{\triangle HBC}$, $S_{\triangle GCA}=S_{\triangle IGC}+S_{\triangle ICA}+S_{\triangle IAG}$。

又上式中的 $S_{\triangle IGC}=S_{\triangle HIG}+S_{\triangle HGC}+S_{\triangle HCI}=S_{\triangle HIG}+S_{\triangle HCI}$。

所以 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle GAB}+S_{\triangle HGB}+S_{\triangle HBC}+S_{\triangle HIG}+S_{\triangle HCI}+S_{\triangle ICA}+S_{\triangle IAG}$。 (2)

同理 $S_{\triangle DEF}=S_{\triangle GEF}+S_{\triangle HGF}+S_{\triangle HFD}+S_{\triangle HIG}+S_{\triangle HDI}+S_{\triangle IDE}+S_{\triangle IEG}$。 (3)

比較 (2)、(3) 兩式右側的 7 對三角形, 其中第4對相同, 第2對、第5對、第7對等底等高。

再看第 1 對: $\triangle GAB$ 與 $\triangle GEB$ 等底等高, 而 $\triangle GEF$ 也與 $\triangle GEB$ 等底等高, 所以第 1 對三角形面積也相等。同理第 3 對、第 6 對面積也相等。

所以 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle DEF}$。

注意到 (2)、(3) 兩式都是由引理 1 推得的, 而引理 1 是恒等式, 則上述證明對定理 1 的各種變式圖形均適用。有興趣的讀者可以對圖一進行驗證。

這種方法對一般的 n 對平行線時也適用。

不知道空間中是否有和定理 1 類似的結論成立?

註: 最初筆者是用座標法來證明 “n對平行線猜想” 的, 經審稿先生建議而改以向量呈現, 使證明過程得以大大簡化。在此謹表謝意!

參考資料

1. 劉步松, 三組平行線定理及其一個猜想[J]。數學傳播, 2013(37), 2: 93-96。

—本文作者任教重慶市長壽龍溪中學—